Писмени испит из Алгебре 1
Л смер, 8.2.2016.

(1) Одредити све подгрупе диедарске групе D_7. Да ли међу њима има изоморфних?

Решење. На вежбама смо тражили подгрупе D_3, исто се ради и за D_7 јер је 7 прост број. (Погледајте 27. задатак у скрипти.) Добијају се подгрупе $\{\varepsilon\}$, $\langle\sigma\rangle$, $\langle\sigma\rho\rangle$, ..., $\langle\sigma\rho^6\rangle$, $\langle\rho\rangle$ и D_7. Редови су им, 1, 2, ..., 2, 7 и 14, редом. Подгрупе различитог реда не могу бити изоморфне. Све подгрупе реда два (па и ове) су међсобно изоморфне јер су цикличне (зато што је број 2 прост). □

(2) Показати да је Ојлерова група $(\Phi_{13}, \cdot_{13})$ циклична. Одредити све генераторе, све подгрупе и све аутоморфизме те групе.

Решење. $|\Phi_{13}| = 12$, па су њени елементи реда 1, 2, 3, 4, 6 или 12. Покушаћемо да нађемо елемент реда 12 који би њен генератор. $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16 \equiv_{13} 3$, $2^6 = 64 \equiv_{13} 12$, следи $r(2) = 12$. Дакле, $\Phi_{13} = \langle 2\rangle$ је циклична.

2 је један генератор, остали ће бити облика 2^k, где је $k \in \Phi_{12} = \{1, 5, 7, 11\}$. Дакле, сви генератори су 2, $2^5 = 32 \equiv_{13} 6$, $2^7 \equiv_{13} 6 \cdot 2^2 = 24 \equiv_{13} 11$ и $2^{11} \equiv_{13} 6^2 \cdot 2 = 72 \equiv_{13} 7$. Делиоци од 12 су 1, 2, 3, 4, 6 и 12. Одговарајуће подгрупе су цикличне групе генерисане елементима $2^{12} \equiv_{13} 1$, $2^6 = 64 \equiv_{13} 12$, $2^4 = 16 \equiv_{13} 3$, $2^3 = 8$, $2^2 = 4$ и 2.

Како је група Φ_{13} циклична, аутоморфизми су потпуно одређени сликом генератора 2. Да би били бијективни неопходно је да 2 сликају у неки од генератора. Зато морају бити облика $x \mapsto x^k$, где је $k \in \{1, 5, 7, 11\}$. Очигледно је да су сва четири пресликавања аутоморфизми. □

(3) Дате су пермутације $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 3 & 6 & 1 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$, $\sigma = \lceil 1, 2, 8, 9, 4\rfloor\lceil 6, 7\rfloor$ и $\tau = \lceil 1, 6, 4\rfloor\lceil 3, 8, 7\rfloor\lceil 6, 9\rfloor$ из S_9. Израчунати $\pi^8\sigma^2\tau^{2016}$. Одредити све пермутације које комутирају и са π и са σ.

Решење. Циклусне декомпозиције су $\pi = \lceil 1, 5, 6\rfloor\lceil 2, 7\rfloor\lceil 3, 9, 4\rfloor$, $\tau = \lceil 1, 6, 4\rfloor\lceil 3, 8, 7\rfloor\lceil 6, 9\rfloor = \lceil 4, 1, 6\rfloor\lceil 6, 9\rfloor \lceil 3, 8, 7\rfloor = \lceil 4, 1, 6, 9\rfloor\lceil 3, 8, 7\rfloor$, а σ је већ растављено. Како дисјунктни циклуси комутирају имамо

$$\pi^8\sigma^2\tau^{2016} = \lceil 1, 5, 6\rfloor^8\lceil 2, 7\rfloor^8\lceil 3, 9, 4\rfloor^8\lceil 1, 2, 8, 9, 4\rfloor^2\lceil 6, 7\rfloor^2\lceil 4, 1, 6, 9\rfloor^{2016}\lceil 3, 8, 7\rfloor^{2016} = \lceil 1, 6, 5\rfloor\lceil 3, 4, 9\rfloor\lceil 1, 8, 4, 2, 9\rfloor =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 & 7 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Нека $f \in S_9$ комутира и са π и са σ. Треба да важи $\lceil 1, 5, 6\rfloor\lceil 2, 7\rfloor\lceil 3, 9, 4\rfloor = f\lceil 1, 5, 6\rfloor\lceil 2, 7\rfloor\lceil 3, 9, 4\rfloor f^{-1} = f\lceil 1, 5, 6\rfloor f^{-1} f\lceil 2, 7\rfloor f^{-1} f\lceil 3, 9, 4\rfloor f^{-1} = \lceil f(1), f(5), f(6)\rfloor\lceil f(2), f(7)\rfloor\lceil f(3), f(9), f(4)\rfloor$, као и $\lceil 1, 2, 8, 9, 4\rfloor\lceil 6, 7\rfloor = \lceil f(1), f(2), f(8), f(9), f(4)\rfloor\lceil f(6), f(7)\rfloor$. Из $\lceil f(6), f(7)\rfloor = \lceil 6, 7\rfloor$ закључујемо да је $f(6) \in \{6, 7\}$. Због $\lceil f(1), f(5), f(6)\rfloor = \lceil 1, 5, 6\rfloor$ мора бити $f(6) = 6$. То даље повлачи $f(1) = 1$, $f(5) = 5$ и $f(7) = 7$. Сада из $\lceil f(1), f(2), f(8), f(9), f(4)\rfloor = \lceil 1, 2, 8, 9, 4\rfloor$ следи да се и 1, 2, 8 и 9 сликају у себе. Преостаје још $f(7) = 7$, одакле закључујемо да једино идентитет комутира и са π и са σ. □

(4) Нека је G Абелова група и $\Delta = \{(g, g) \mid g \in G\}$ дијагонала Декартовог производа $G \times G$. Показати да је $\Delta \lhd G \times G$ и $(G \times G)/\Delta \cong G$.

Решење. Дефинишимо $\Phi : G \times G \longrightarrow G$ са $\Phi(g, h) = g \star h^{-1}$. Φ је хомоморфизам јер је $\Phi((g, h) \star (g', h')) = \Phi(g \star g', h \star h') = g \star g' \star (h \star h')^{-1} = g \star g' \star h'^{-1} \star h^{-1} = g \star h^{-1} \star g' \star h'^{-1} = \Phi(g, h) \star \Phi(g', h')$. Према првој теореми о изоморфизмима је $(G \times G)/\operatorname{Ker}\Phi \cong \operatorname{Im}\Phi$ и $\operatorname{Ker}\Phi \lhd G \times G$. За свако $g \in G$ је $\Phi(g, e) = g$, па је Φ „на“. $\Phi(g, h) = e$ акко је $g = h$, акко $(g, h) \in \Delta$. Дакле, $(G \times G)/\Delta \cong G$ и $\Delta \lhd G \times G$. (А ово друго је могло и лако пешачки да се провери будући даје $G \times G$ Абелова група као производ две Абелове.)

□

5 Одредити остатак при дељењу броја $99^{999} + 99!$ са 9999.

Решење. $9999 = 99 \cdot 101$ и 99 и 101 су узајамно прости, па можемо применити кинеску теорему. Очигледно је број $n = 99^{999} + 99!$ дељив са 99.

Према малој Фермаовој (или Ојлеровој) теореми је $99^{999} \equiv_{101} 99^{99} \equiv_{101} (-2)^{99} = -2^{99}$. Како је $2^{100} \equiv_{101} 1 \equiv_{101} 102 = 2 \cdot 51$ дељењем са два добијамо $2^{99} \equiv_{101} 51$. Према Вилсоновој теореми је $-1 \equiv_{101} 100! = 100 \cdot 99! \equiv_{101} -99!$. Следи, $n \equiv_{101} -51 + 1 = -50 \equiv_{101} 51$.

Још треба решити систем конгруенција $n \equiv_{99} 0$, $n \equiv_{101} 51$. $n = 99m$ и $51 \equiv_{101} 99m \equiv_{101} -2m$, тј. $2m \equiv_{101} -51 \equiv_{101} 50$ одакле следи да је $m \equiv_{101} 25$. Дакле, $n \equiv_{9999} 99 \cdot 25 = 2475$. □

6 Група G је задата генераторима x_1, x_2 и x_3 и релацијама

$$\begin{array}{rcrcrcl} 12x_1 & - & 18x_2 & + & 18x_3 & = & 0 \\ & & 15x_2 & - & 27x_3 & = & 0 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

Одредити број елемената реда 3 у групи G.

Решење.

$$\begin{pmatrix} 12 & -18 & 18 \\ 0 & 15 & -27 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[K_1 \leftrightarrow K_2]{\substack{K_2 \to -K_2 \\ V_1 \leftrightarrow V_3}} \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -15 & 0 & -27 \\ 18 & 12 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{V_2 \to V_2 + 5V_1 \\ V_3 \to V_3 - 6V_1}} \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 0 & 30 & -42 \\ 0 & -24 & 36 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{K_2 \to K_2 - 2V_1 \\ K_3 \to K_3 + K_1}}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -42 \\ 0 & -24 & 36 \end{pmatrix} \xrightarrow{V_2 \to V_2 + V_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -12 \\ 0 & -24 & 36 \end{pmatrix} \xrightarrow{V_3 \to V_3 + 4V_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{K_3 \to K_3 + 2V_2 \\ K_3 \to -K_3}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Дакле, $G \cong Z_3 \times Z_6 \times Z_{12} \cong Z_2 \times Z_4 \times Z_3^3$. $B(3, G) = B(3, Z_3^3) = 26$ јер су сви елементи сем неутрала $(1, 1, 1)$ реда три. □